

屏東縣第 51 屆國中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國小組

作品名稱：數學速算法的探索與應用

關 鍵 詞：乘法、面積、速算法（最多三個）

編號：

製作說明：

- 1.說明書封面僅寫科別、組別、作品名稱及關鍵詞。
- 2.編號：由承辦學校統一編列。
- 3.封面編排由參展作者自行設計。

數學速算法的探索與應用

壹、研究動機：

我們之所以會想研究速算法，是因為有一次老師丟給我一堆算式，要我們找出其中的規律，分別是： $11 \times 19 = ?$ $12 \times 18 = ?$ $13 \times 17 = ?$

$14 \times 16 = ?$ $15 \times 15 = ?$ $91 \times 99 = ?$ $92 \times 98 = ?$ $93 \times 97 = ?$ $94 \times 96 = ?$ $95 \times 95 = ?$ 我們發現這些算式中的被乘數和乘數的十位數都相同而且個位數相加都等於十。

接下來老師又要我們當場把這些式子的解答算出來。只見每一個學生都算得汗流浹背的還沒算完，老師卻輕輕鬆鬆、又快又正確的寫出了每一個題目的正確解答。

我們非常好奇，為什麼老師能這麼神奇地快速解答這些題目。老師笑而不答，要我們先觀察題目和答案的關係。我們發現，答案的十位數以下，恰是題目相乘兩數的個位數相乘積；答案的百位數以上，

恰是題目相乘兩數的十位數與其本身的數字加 1 後的數字相乘積。

舉 92×98 為例，首先先用 92 的個位數 2 乘以 98 的個位數 8，因為 $2 \times 8 = 16$ 所以是 16 ($92 \times 98 = ??16$) 再來，用 92 的十位數 9 乘以 98 的十位數 9 加上 1 就會等於 $9 \times (9+1) = 90$ 然後把 90 填進去 ($92 \times 98 = 9016$) 所以答案是 9016。後來我們用直式乘法驗算，答案果然是 9016。

我們發現其他的算式也可以這樣解，而且答案也都正確。這種既快速又正確的計算方法引起了我們濃厚的興趣，所以就開始研究速算法，希望能一探這種速算法的奧妙到底何在。

貳、研究目的：

- 一、這種速算法為什麼可以這麼做？
- 二、這種速算法有哪些特例？
- 三、這種速算法要如何加以應用？

叁、研究過程：

一、從算式中尋找規律

我們試著發現以下的題目與答案間的關係。

(特別留意有畫底線數字間的關係

與沒畫底線數字間的關係

加框線的式子為乘數與被乘數都相同的特例)

$$11 \times 19 = 209$$

$$12 \times 18 = 216$$

$$13 \times 17 = 221$$

$$14 \times 16 = 224$$

$$15 \times 15 = 225$$

$$21 \times 29 = 609$$

$$22 \times 28 = 616$$

$$23 \times 27 = 621$$

$$24 \times 26 = 624$$

$$\boxed{25 \times 25 = 625}$$

$$31 \times 39 = 1209$$

$$32 \times 38 = 1216$$

$$33 \times 37 = 1221$$

$$34 \times 36 = 1224$$

$$\boxed{35 \times 35 = 1225}$$

$$41 \times 49 = 2009$$

$$42 \times 48 = 2016$$

$$43 \times 47 = 2021$$

$$44 \times 46 = 2024$$

$$\boxed{45 \times 45 = 2025}$$

$$51 \times 59 = 3009$$

$$52 \times 58 = 3016$$

$$53 \times 57 = 3021$$

$$54 \times 56 = 3024$$

$$\boxed{55 \times 55 = 3025}$$

$$61 \times 69 = 4209$$

$$62 \times 68 = 4216$$

$$63 \times 67 = 4221$$

$$64 \times 66 = 4224$$

$$\boxed{65 \times 65 = 4225}$$

$$71 \times 79 = 5609$$

$$72 \times 78 = 5616$$

$$73 \times 77 = 5621$$

$$74 \times 76 = 5624$$

$$\boxed{75 \times 75 = 5625}$$

$$81 \times 89 = 7209$$

$$82 \times 88 = 7216$$

$$83 \times 87 = 7221$$

$$84 \times 86 = 7224$$

$$\boxed{85 \times 85 = 7225}$$

$$91 \times 99 = 9009$$

$$92 \times 98 = 9016$$

$$93 \times 97 = 9021$$

$$94 \times 96 = 9024$$

$$\boxed{95 \times 95 = 9025}$$

二、發現規律

觀察以上的算式後我們發現了以下的規律：

(一) 相乘的兩數其十位數均相同。

(二) 相乘的兩數其個位數相加均為十。

(三) 此相乘的兩數，其積為十位數的數字與其本身的數字加 1 後的數字相乘，再與個位數相乘答案的合體。

數學的表示方法： $100 \times \text{十位數} \times (\text{十位數} + 1) + \text{個位數} \times \text{個位數}$

【例一】

$$\begin{aligned} &72 \times 78 \\ &= 100 \times 7 \times (7+1) + 2 \times 8 \\ &= 5616 \end{aligned}$$

【例二】

$$\begin{aligned} &91 \times 99 \\ &= 100 \times 9 \times (9+1) + 1 \times 9 \\ &= 9009 \end{aligned}$$

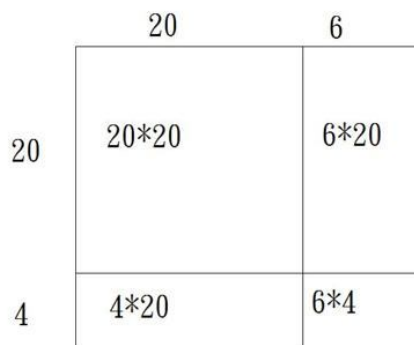
三、原理的探索

由以上的特例，我們可以嘗試推導通式如下：

【用幾何圖形面積概念來嘗試理解】

兩個數字相乘，我們可以視為矩形的兩個邊長相乘來求面積。

所以 26×24 可繪圖如下：



$$\begin{aligned} &26 \times 24 \\ &= (20+6) \times (20+4) \\ &= (20 \times 20) + (6 \times 20) + (4 \times 20) + (6 \times 4) \\ &= (20 \times 20) + (10 \times 20) + (6 \times 4) \\ &= 100 \times 2(2+1) + (6 \times 4) \\ &= 324 \end{aligned}$$

同理 $ab \cdot a(10-b)$ 亦可繪圖如下：

(註：未避免乘號 $\times$ 與英文字母 X 混淆，以下用 $*$ 代表乘號 $\times$)

	$10a$	b
$10a$	$10a*10a$	$b*10a$
$10-b$	$(10-b)*10a$	$b*(10-b)$

$$\begin{aligned}
 & ab \cdot a(10-b) \\
 &= (10a+b) * (10a+(10-b)) \\
 &= 10a*10a+b*10a+(10-b)*10a+b*(10-b) \\
 &= 100a*a+100a+b*(10-b) \\
 &= 100a*(a+1)+b*(10-b)
 \end{aligned}$$

討論：

由於面積 $b*10a$ 與 $(10-b)*10a$ 合併後可化簡為 $10*10a=100a$
再與正方形面積 $100a*a$ 合併為 $100a*(a+1)$

【用數學代數的方法推導通式】

設 $ab=a*10+b$

$$a(10-b)=a*10+(10-b)$$

則 $ab*[a(10-b)]$

$$\begin{aligned}
 &=(a*10+b)*(a*10+(10-b)) \\
 &=100*a*a+(b*(a*10))+a*10(10-b)+b*(10-b) \\
 &=100*a*a+b*a*10+a*10*10-a*10*b+b*(10-b) \\
 &=100*a*a+a*100+b*(10-b) \\
 &=100*a*(a+1)+b*(10-b)
 \end{aligned}$$

由以上的通式我們等於用代數的方法證明了

相乘的兩數當其個位數相加均為十且其十位數以上均相同時，其積為 100 倍〔(十位數)乘以(十位數加一)〕再加上個位數相乘的二位數。亦即相乘的兩數，其積為十位數的數字與其本身的數字加 1 後的數字相乘，再與個位數相乘答案的合體。

四、速算法的應用

1.當二位數以上相乘時，此速算法仍然適用。

$$\begin{aligned} & (1) 123*127 \\ & = 100*(12*(12+1))+3*7 \\ & = 15621 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) 124*126 \\ & = 100*(12*(12+1))+4*6 \\ & = 15624 \end{aligned}$$

2.當個位數相加不等於 10 時，想辦法將它配成相加等於 10。

$$\begin{aligned} & (1) 124*127 \\ & = (123+1)*127 \\ & = 123*127+1*127 \\ & = 15621+127 \\ & = 15748 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) 124*127 \\ & = 124*(126+1) \\ & = 124*126+124 \\ & = 15624+124 \\ & = 15748 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3) 124*128 \\ & = 124*(126+2) \\ & = 124*126+124*2 \\ & = 15624+248 \\ & = 15872 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (4) 124*128 \\ & = (123+1)*(127+1) \\ & = 123*127+1*127+123*1+1*1 \\ & = 15621+251 \\ & = 15872 \end{aligned}$$

3.當十位數以上不相同時，想辦法將它配成相同。

$$\begin{aligned} & (1) 223 \times 127 \\ &= (123 + 100) \times 127 \\ &= 123 \times 127 + 100 \times 127 \\ &= 15621 + 12700 \\ &= 28321 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) 123 \times 227 \\ &= 123 \times (127 + 100) \\ &= 123 \times 127 + 123 \times 100 \\ &= 15621 + 12300 \\ &= 27921 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3) 323 \times 227 \\ &= (123 + 200) \times (127 + 100) \\ &= 123 \times 127 + 123 \times 100 + 127 \times 200 + 200 \times 100 \\ &= 15621 + 12300 + 25400 + 20000 \\ &= 73321 \end{aligned}$$

4.當數字很大時，更顯示出此速算法的妙用。

$$\begin{aligned} & (1) 999993 \times 999997 \\ &= 100 (99999 \times (99999 + 1)) + 3 \times 7 \\ &= 999990000021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (2) 999994 \times 999997 \\ &= (999993 + 1) \times 999997 \\ &= 99993 \times 999997 + 999997 \\ &= 999990000021 + 999997 \\ &= 999991000018 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3) 999994 \times 999998 \\ &= (999993 + 1) \times (999997 + 1) \\ &= 999993 \times 999997 + 999993 \times 1 + 1 \times 999997 + 1 \times 1 \\ &= 999990000021 + 999993 + 999997 + 1 \\ &= 999990000021 + 1999990 + 1 \\ &= 999992000011 + 1 \\ &= 999992000012 \end{aligned}$$

肆、研究結論：

- 一、十位數的數字相同，個位數的數字相加之後等於 10 的 2 位數乘法，其積為十位數的數字與其本身的數字加 1 後的數字相乘，再與個位數相乘答案的合體。
- 二、十位數以上的數字相同，個位數的數字相加之後等於 10 的數字，亦可應用相類似的速算法。
- 三、此速算法可以用代數的方法加以證明。
- 四、此速算法可以應用面積的概念來加以理解。
- 五、在此速算法的應用上：
 - (一) 1.當二位數以上相乘時，此速算法仍然適用。
 - (二) 2.當個位數相加不等於 10 時，想辦法將它配成相加等於 10。
 - (三) 3.當十位數以上不相同時，想辦法將它配成相同。
 - (四) 4.當數字很大時，更顯示出此速算法的妙用。

伍、參考資料：

- 一、野口哲典著，溫家惠譯（2008）：培養孩子數學腦的遊戲書。
台北縣：世茂出版有限公司。
- 二、瓦利·納瑟著，朱凱莉譯（2009）：印度式數學速算。
台北縣：稻田出版有限公司。
- 三、波沙曼提爾著，葉偉文譯（2005）：神奇數學 117。
台北市：天下遠見出版股份有限公司。
- 四、歷屆科展資料。